Leçon 106 : Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL(E). Applications.

1 Généralités (Rombaldi, Perrin)

1.1 Premières définitions

- Définition
- Isomorphisme avec $GL_n(\mathbb{K})$
- Le dét est un morphisme dont le noyau est $SL(E)$
- Définitions dilatations/transvections + caractérisations

1.2 Structure

- Transvections engendre $SL(E)$
- Transvections + Dilatations engendrent $GL(E)$
- Pivot de gauss
- Résultats de conjugaison

1.3 Un peu de topoplogie

- GL(E) ouvert dense et $u \mapsto u^{-1}$ continue
- SL(E) fermé
- $GL_n(\mathbb{C})$ connexe

2 Étude de $GL(E)$ et $SL(E)$ (Rombaldi, Perrin)

2.1 Sous-groupe de $GL(E)$

- Centre des deux
- Groupe dérivé des deux
- $SL(E)$ distingué + isomorphisme du quotient avec $\mathbb{K}^*$
- Cas spécial des corps algébriquement clos (PGL et PSL sont isomorphes)
- G sous groupe fini alors tous ses éléments sont dz
- Théorème de Burnside

2.2 Sur les corps finis

- Cardinal des différents sous-groupes pour les corps finis
- Action transitive de P(E) sur GL(E)
- Isomorphismes exceptionnels
- Dév 1 : Nombre d'endo dz sur un corps finis

2.3 Matrices de permutations

- Définition des matrices
- Morphisme qui permet de l'identifier à un sous-groupe
- Décomposition de Bruhat
- Tout groupe fini est isomorphe à un sous groupe de $GL_n(\mathbb{F}_p)$

2.4 Groupe orthogonal

- Définition + caractérisation des isométries
- O(E) sous groupe de GL(E)
- Réduction des isométries
- Dév 2 : Décomposition polaire